Срок выполнения 11.02.22

Уравнения и неравенства с одной переменной, их решение.

$ax+b=0, \left(x=\frac{-b}{a}, a\neq 0\right)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ – уравнение II степени с одной переменной

$$\boxed{D=b^2-4ac; \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

Решить уравнение – значит найти множество его корней или доказать, что их нет. это множество называют решением уравнения.

Два уравнения называются равносильными если решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого уравнения и наоборот.

Уравнения $x=0$ и $x\left(x^2+3\right)=0$ равносильны, так как оба имеют единственный корень $x=0$.

Уравнения $x^2-x=0$ и $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x+1}{x}$ – неравносильны, так как $x=0$ является корнем первого уравнения, но не удовлетворяет второму уравнению.

Уравнения $2x-10=0$ и $(2x-10)(x+1)=0$ неравносильны, так как корень первого уравнения $x=5$, а второе уравнение кроме этого корня имеет еще корень $x=-1$, который не является корнем первого уравнения.

Решим уравнения:

$a)\left(3x+1\right)^2+\left(4x-1\right)^2=\left(5x-2\right)^2$

раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1=25x^2-20x+4.$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1-25x^2+20x-4=0.$

приведем подобные члены, получим

$18x-2=0$

$18x=2$

$x=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

Ответ: $x=\frac{1}{9}$ – корень уравнения.

$б)\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$ разложим x^2-4 на множители

перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{x(x+2)-7(x-2)-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2+2x-7x+14-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{(x+2)(x-2)}=0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е.

$(x+2)(x-2)\neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad x\neq 2;\ x\neq -2$

$x^2-5x+6=0.$

Решаем уравнение

$D=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2};$ (корни можно найти по теореме Виета)

$x_1=3; x_2=2$

Так как $x\neq 2,$ то $x_2=2$ – посторонний корень и решением уравнения будет $x=3$.

Ответ: $x=3$.

$в) x^2-x+4=0$

$D=1-4\cdot 4=-15<0$

Действительных корней нет.

Самостоятельно

$$\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{9}{x^2+3x+2}$$

$$x^2-7x+16=0$$

$ax\geq b;\ ax\leq b;\ ax>b;\ ax<b.\ (a\neq 0)$ – неравенства I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq 0)$
$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$ – неравенства II степени с одной переменной

Решить неравенство – значит найти множество значений переменной, при которых это неравенство является верным.

Два неравенства называются равносильными, если множество решений этих неравенств совпадают.

Решим неравенства

а) $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то есть сразу видно что он не равен нулю, то в дальнейшем его можно не писать (опустить).

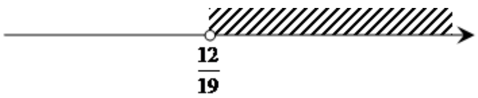
$50x-5(7x-1)+2(2x-5)-7>0$

$50x-35x+5+4x-10-7>0$

$19x-12>0$

$19x>12$

$x>\frac{12}{19}$



$x\in\left(\frac{12}{19};+\infty\right)$

Ответ: $(\frac{12}{19};\ +\infty)$

б) $|5-2x|<3$

, то есть $-3<5-2x<3$

Используя свойства числовых неравенств, имеем

$-3-5<5-2x-5<3-5$

$-8<-2x<-2$; делим на (-2), знак неравенства меняется на противоположный

$4>x>1 \quad \Leftrightarrow \quad 1<x<4$

Ответ: $x\in(1;4)$

Или можно записать в виде системы неравенств

$\begin{cases}5-2x<3\\5-2x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<3-5\\-2x>-3-5\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<-2\\-2x>-8\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\x<4\end{cases}$

Ответ: $x\in(1;4)$

г) $5x-2-3x^2>0$

умножим на (–1)

$3x^2-5x+2<0$

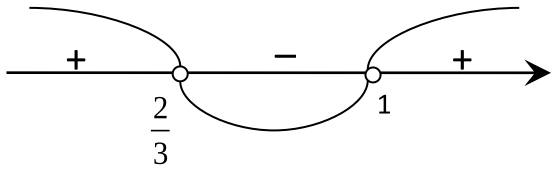
квадратное неравенство

Найдем корни уравнения $3x^2-5x+2=0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{6}; \qquad x_1 = 1; x_2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Решим методом интервалов



получаем три интервала, в которых определяем знак трехчлена. Так как мы решаем неравенство $3x^2 - 5x + 2 < 0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$

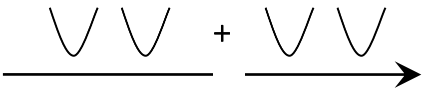
Ответ: $(\frac{2}{3}; 1)$

д) $4x - 12x^2 - 3 > 0$

$12x^2 - 4x + 3 < 0$

$12x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 12 \cdot 3 < 0$



действительных корней нет, так как ветви параболы направлены вверх, то парабола не пересекает ось и расположена выше её, где всегда > 0,

а мы решаем неравенство $12x^2 - 4x + 3 < 0$, значит данное неравенство не имеет решения.

ж) $\dfrac{5-2x}{3x-1} \geq 2$ – дробно–рациональное неравенство, которое может быть решено методом интервалов.

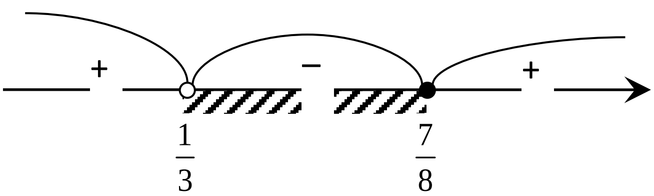
Перенесем правую часть в левую, приведем подобные члены

$$\frac{5-2x}{3x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{5-2x-6x+2}{3x-1} \geq 0$$

$$\frac{-8x+7}{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x-7}{3x-1} \leq 0$$

Метод интервалов позволяет ускорить процесс решения неравенства $\dfrac{8x-7}{3x-1} \leq 0$



корни $x = \dfrac{7}{8}$ и $x = \dfrac{1}{3}$.

$x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{8}\right]$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{8}\right]$

Самостоятельно:

$|3x-7| \leq 5$

$-x^2+7x-10<0$

$\frac{4x-3}{7+2x} \leq 3$

Уравнения, приводимые к квадратным

Биквадратное уравнение

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ решается сведением к квадратному уравнению с помощью введения новой переменной. пусть $x^2 = y$, тогда имеем $ay^2 + by + c = 0$ и решается квадратное уравнение относительно *y*.

Например.

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y$

$4y^2 - 5y + 1 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}; \quad y_1 = 1; \; y_2 = \frac{1}{4}$

и тогда $x^2 = 1$ и $x^2 = \frac{1}{4}$, решаем эти уравнения:

$x_{1,2} = \pm 1; \quad x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$ получили четыре действительных корня.

Ответ: $\pm 1; \; \pm\frac{1}{2}$

Решить самостоятельно:

а) $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

б) $x^4 + 9x^2 = 0$

Решение целых уравнений высших степеней методом разложения на множители

В основе метода лежит тот факт, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл.

Существует несколько способов разложения многочленов на множители:
- вынесение за скобку общего множителя;
- использование формул сокращенного умножения;
- группировка.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $x^3 - 8x^2 + 3x - 24 = 0$ 2) $(y^2 - 5y)^2 = 30y - 6y^2$

$x^2(x-8)+3(x-8)=0$
$(x-8)(x^2+3)=0$
$x-8=0$ или $x^2+3=0$
$x=8$ $\quad x^2=-3$
нет корней
Ответ: 8

$(y^2-5y)^2-30y+6y^2=0$
$(y^2-5y)^2+6(y^2-5y)=0$
$(y^2-5y)(y^2-5y+6)=0$
$y^2-5y=0$ или $y^2-5y+6=0$
$y(y-5)=0$ $\quad D=25-24=1$
$y_1=0$ $\quad y_3=\frac{5-1}{2}=2$
$y_2=5$ $\quad y_4=\frac{5+1}{2}=3$
Ответ: 0; 2; 3; 5

Решите уравнения:
$(2x-5)(x^2-4)=7x^2-28$
$x^3+3x^2=4x+12$
$x^4-3x^3-x+3=0$
$x^5-x^4=0$

Решение систем линейных уравнений и неравенств

Определение: Система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными. Действительные числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются коэффициентами при неизвестных, числа c_1, c_2 –свободными коэффициентами.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Методы решения:

1. Метод подстановки
2. Метод алгебраического сложения.
3. Графический метод.

Если в системе уравнений коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны, а свободные коэффициенты не равны нулю, то система решений не имеет. Если же коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны, а свободные коэффициенты равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 6: Решить систему уравнений

Способ подстановки $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 6 \\ \frac{x+y}{4} = \frac{x-y}{3} \end{cases}$ \

Решение: 1. Умножаем обе части уравнения (1) на 6, а обе части уравнения (2) на 12, тогда система уравнений имеет вид:

3 (x +y) + 2 (x – y) = 36

$$\begin{cases} 3(x+y) + 2(x-y) \\ 3(x+y) = 4(x-y) \end{cases}$$

2. После преобразований система имеет вид:

$$\begin{cases} 5x - y = 36 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$$

4. Выражаем из второго уравнения x и подставляем его в первое уравнение, получаем:

x = 7y ,

35y + y =36

y = 1.

5. Найденное значение y подставляем в выражение для x,

x-7=0

тогда x = 7.

6. Чтобы исключить вычислительные ошибки в системе уравнений рекомендуется делать проверку, путем подстановки найденных значений x и y в каждое уравнение или в то уравнение, из которого не выражали переменную x или y.

Проверка

$$\begin{cases} \frac{7+1}{2} + \frac{7-1}{3} = 6 \\ \frac{7+1}{4} = \frac{7-1}{3} \end{cases}$$

Ответ: x = 7, y = 1.

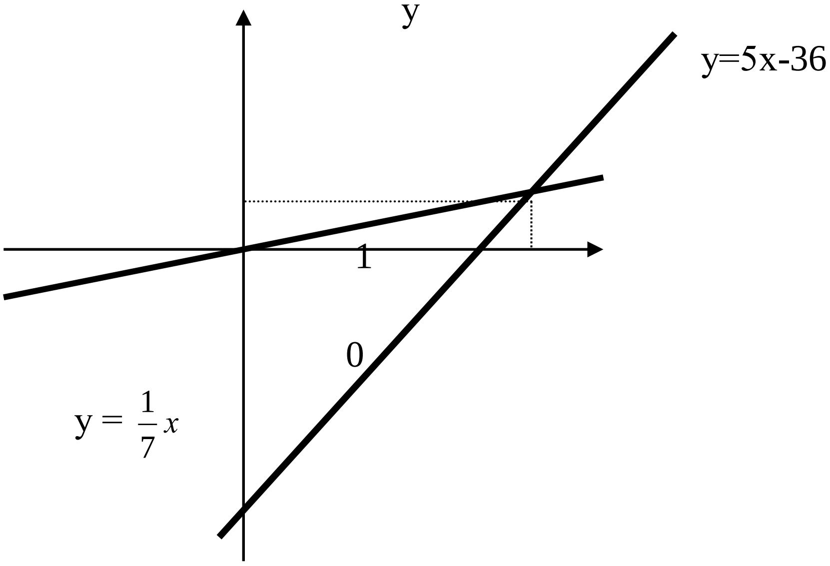
Графический способ.

1. Приведем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} y = 5x - 36 \\ y = \frac{1}{7}x \end{cases}$$

Построим графики полученных функций и найдем координаты точки их пересечения.

Чтобы точно найти координаты точки пересечения, необходимо приравнять функции друг к другу. Тогда, 5x-36 = $\frac{1}{7}x$, отсюда x=7. Для того чтобы найти значение y, необходимо найденное значение x подставить в любое уравнение системы.



Самостоятельно

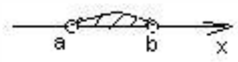
Решить системы уравнений

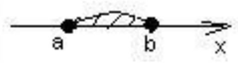
а) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x = -y + 5 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x + 8y = -11 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases}$

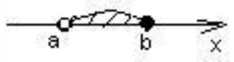
Г) $\begin{cases} 5x + y = -13, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

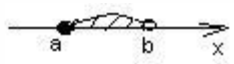
Система линейных неравенств.

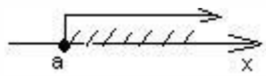
При решении систем линейных неравенств возможны следующие виды интервалов:

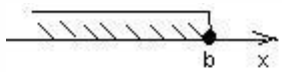
Интервал  $(a; b)$ a< x< b

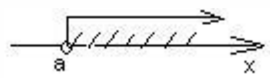
Отрезок  $[a; b]$ a≤ x≤ b

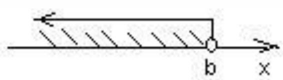
Полуинтервал  $(a; b]$ a< x≤ b

Полуинтервал  $[a; b)$ a≤ x <b

Луч  $[a; +\infty)$ x≥a

Луч  $(-\infty; b]$ x≤b

Открытый луч  $(a; +\infty)$ x>a

Открытый луч  $(-\infty; b)$ x<b

Пусть задано несколько неравенств с одним неизвестным.

Совокупность этих неравенств называют *системой неравенств* с одним неизвестным. Решение системы – это значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – это значит найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы.

Две системы неравенств называются *равносильными,* если всякое решение одной из них является решением другой, и наоборот. Если обе системы неравенств не имеют решений, то они также считаются равносильными.

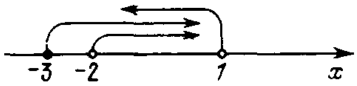
Для записи и изображения решения системы неравенств необходимо учитывать строгие и нестрогие знаки неравенства (строгие знаки обозначают светлыми точками, нестрогие - темными)

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x-4 < 8x+6, \\ 2x-1 > 5x-4, \\ 11x-9 \le 15x+3. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство: $3x-4 < 8x+6$, $-5x < 10$, $x > -2$. Оно выполняется при $x > -2$. Решим второе неравенство: $2x-1 > 5x-4$, $-3x > -3$, $x < 1$. Оно выполняется при $x < 1$. Решим третье неравенство: $11x-9 \le 15x+3$, $-4x \le 12$, $x \ge -3$. Оно выполняется при $x \ge -3$.

Все три данных неравенства верны при $-2 < x < 1$ (рис. 4.2).

Ответ. $-2<x<1$.



Пример

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x-8>0. \end{cases}$$

Расположим одну под другой две числовые прямые (рис. 31); на верхней отметим те значения $\boldsymbol{x}$, при которых выполняется первое неравенство ($\boldsymbol{x} > 1$), а на нижней—те значения $\boldsymbol{x}$, при которых выполняется второе неравенство ($\boldsymbol{x} > 4$).

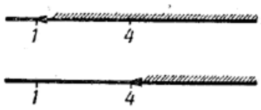


Рис. 31

Сравнивая результаты на числовых прямых, замечаем, что оба неравенства одновременно будут удовлетворяться при $\boldsymbol{x} > 4$. Ответ, $\boldsymbol{x} > 4$.

Пример

$$\begin{cases} 1-x<2x-5, \\ 3-x>-5. \end{cases}$$

Первое неравенство дает $-3\boldsymbol{x} < -6$, или $\boldsymbol{x} > 2$, а второе $-\boldsymbol{x} > -8$, или $\boldsymbol{x} < 8$. Далее поступаем так же, как и в первом примере. На одной числовой прямой отмечаем все те значения $\boldsymbol{x}$, при которых выполняется первое неравенство системы, а на второй числовой прямой, расположенной под первой, все те значения $\boldsymbol{x}$, при которых выполняется второе неравенство системы (рис. 32).

Рис. 32.

Сравнение этих двух результатов показывает, что оба неравенства одновременно будут выполняться при всех значениях $\boldsymbol{x}$, заключенных от 2 до 8. Множество таких значений $\boldsymbol{x}$ записывается в виде двойного неравенства $2 < \boldsymbol{x} < 8$.

Пример Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 14x - 3 \leqslant 7 + 9x, \\ 1 < x - 3 \end{cases}$$

Первое неравенство системы дает $5\boldsymbol{x} < 10$, или $\boldsymbol{x} < 2$, второе $\boldsymbol{x} > 4$. Таким образом, любое число, удовлетворяющее обоим неравенствам одновременно, должно быть не больше 2 и больше 4 (рис. 33).

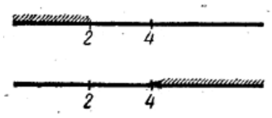


Рис. 33.

Но таких чисел не существует. Поэтому данная система неравенств не выполняется ни при каких значениях $\boldsymbol{x}$. Подобные системы неравенств называются несовместными.

Самостоятельно.

Решить системы неравенств

а) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 6x + 1 \\ 4 - 3x \rangle 2x - 6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x \rangle 9 - 4x \\ 3(5 - 2x) - 1 \geq 4 - 5x \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12y - 3(y + 2) \geq 7y - 5 \\ 13y + 6 \leq (y - 5)\,2 + 3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} \langle \dfrac{3x-8}{4} \\ \dfrac{6-x}{5} - 1 \langle \dfrac{14x-3}{2} \end{cases}$