На неделе дистанционного обучения у вас должно быть 1 занятие (если не изменят расписание)
Теорию переписываем сжато без доказательств. Примеры записываем и разбираем внимательно (подобные будут в экзамене)
Практическое задание делаем полностью и высылаем мне на электронную почту
(Nkrotenko2018@list.ru)

Занятие1

Логарифмы и их свойства. Натуральный и десятичный логарифмы

Легко решить уравнения $2^x = 4$ и $2^x = 8$. Их корнями будут соответственно числа 2 и 3.

Однако для уравнения $2^x = 5$ сразу указать его корень сложно.

Возникает естественный вопрос: есть ли вообще корни у этого уравнения?

Обратимся к графической интерпретации. На рисунке 19.1 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$. Они пересекаются в некоторой точке A $(x_0; 5)$. Следовательно, уравнение $2^x = 5$ имеет единственный корень x_0.

Однако графический метод не позволяет определить точное значение x_0.

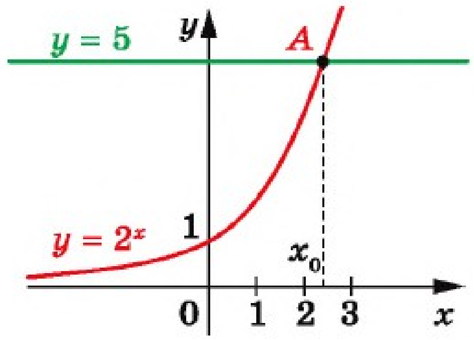

Рис. 19.1

Корень уравнения $2^x = 5$ договорились называть **логарифмом числа** 5 **по основанию** 2 и обозначать $\log_2 5$. Таким образом, число $\log_2 5$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 5. Можно записать:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

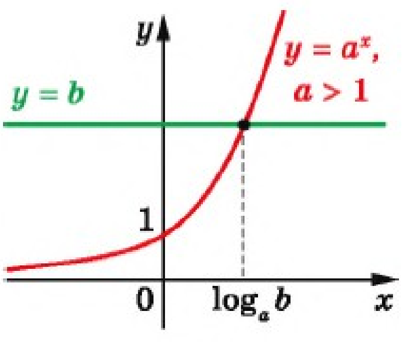

Рис. 19.3

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Так как для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ это уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то это уравнение имеет единственный корень (рис. 19.3). Его называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_3 9$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 3, чтобы получить число 9. Имеем: $\log_3 9 = 2$, поскольку $3^2 = 9$.

Еще несколько примеров:

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, так как $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, так как $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, так как $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, так как $100^0 = 1$.

Из определения логарифма следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется равенство

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Его называют **основным логарифмическим тождеством.**

Например, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Также из определения логарифма следует, что при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Рассмотрим равенство $a^c = b$.

Вы знаете, что действие нахождения числа b по данным числам a и c называют возведением числа a в степень c.

Действие нахождения числа c по данным числам a и b, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, называют **логарифмированием числа b по основанию a**. Действительно, $c = \log_a b$.

Отметим, что при $a > 0$ левая часть равенства $a^c = b$ положительна. Следовательно, $b > 0$.

Поэтому при $b \leqslant 0$ выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом**. Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Используя это обозначение и основное логарифмическое тождество, для каждого $b > 0$ можно записать: $10^{\lg b} = b$.

Натуральный логарифм

- ***Натуральным логарифмом*** называется *логарифм по основанию* *e*. Он обозначается **ln** , т.е. $\log_e a = \ln a$. Число *e* является иррациональным, его приближённое значение 2.718281828. Значения натуральных логарифмов можно вычислить только приближенно

Свойства логарифмов

$$1.\ log_a(1) = 0;$$

$$2.\ log_a(a) = 1;$$

$$3.\ log_a(b * c) = log_a(b) + log_a(c);$$

$$4.\ log_a(\frac{b}{c}) = log_a(b) - log_a(c);$$

$$5.\ log_a(b^m) = m * log_a(b);$$

$$6.\ log_{a^m}(b) = \frac{1}{m} * log_a(b);$$

$$7.\ log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)},;\ b > 0;\ c > 0;\ c \neq 1;$$

$$8.\ log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)};$$

$$9.\ a^{log_a(b)} = b.$$

Пример 1. Решите уравнение: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Решение. 1) Из определения логарифма следует, что $x = \log_3 7$.

2) Имеем: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Ответ: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◄

Пример 2. Вычислите значение выражения: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Имеем: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = \left(3^{\log_3 4}\right)^2 : 3 = 4^2 : 3 = \dfrac{16}{3}$. ◄

Пример 3. При каком значении x выполняется равенство: 1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Решение. 1) Выражение $\log_{\frac{1}{2}} x$ определено при $x > 0$. Из определения логарифма следует, что $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = x$, то есть $x = 32$.

2) Выражение $\log_x 16$ определено при $x > 0$ и $x \neq 1$. Согласно определению логарифма имеем: $x^4 = 16$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 2$. ◄

Пример 4. Вычислите значение выражения.

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\dfrac{1}{2}\log_{36} 9 + \dfrac{1}{3}\log_{36} 8$.

Решение.

1) Применяя свойства логарифма, получаем:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$
$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Применяя свойства логарифма, получаем:

$$\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}.$$

Практическая часть занятия 1.

№1 Верно ли равенство:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3;$

2) $\log_{25} 5 = 2;$

3) $\log_5 125 = \frac{1}{3};$

№2 Найдите логарифм по основанию 2 числа: 1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$;

№3 Решите уравнение

1) $\log_7 x = -1;$

2) $\log_4 x = \frac{1}{2};$

3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6;$

№4 Найдите значение виражений:

1) $\log_6 3 + \log_6 2;$

2) $\log_5 100 - \log_5 4;$

3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12;$