Теорию переписываем сжато без доказательств. Примеры записываем и разбираем внимательно (подобные будут в экзамене)

Практическое задание делаем полностью и высылаем мне на электронную почту

(Nkrotenko2018@list.ru *)*

Занятие2 (07.02.22)

Логарифмическая функция, ее свойства и график.

Выберем положительное число a, отличное от 1. Каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число y такое, что $y = \log_a x$. Такое правило задаёт функцию $f(x) = \log_a x$ с областью определения $D(f) = (0; +\infty)$.

Эту функцию называют **логарифмической**.

Покажем, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является обратной к показательной функции $g(x) = a^x$.

Для любого $y_0 \in \boldsymbol{R}$ уравнение $\log_a x = y_0$ имеет корень (он равен a^{y_0}).

Это означает, что *областью значений логарифмической функции является множество* $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

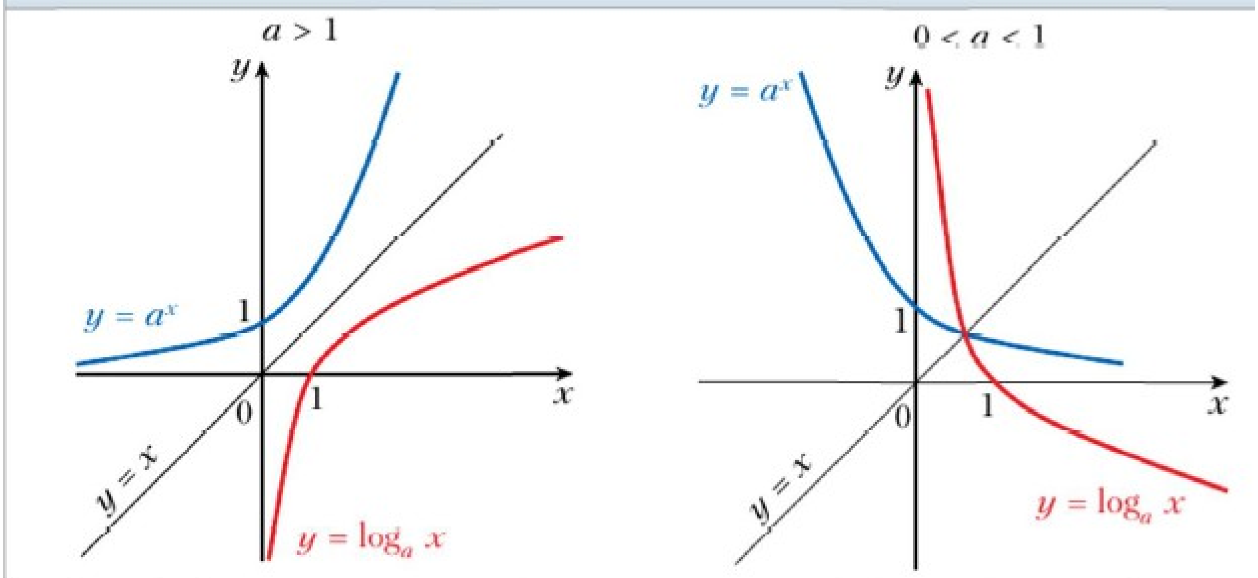
$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для любого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ выполняется равенство $a^{\log_a x} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g – взаимно обратные функции.

Поскольку графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, то, пользуясь графиком показательной функции $y = a^x$, можно построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

Функция $y = \log_a x$ *имеет единственный нуль:* $x = 1$.

Рис. 5.1



Функция $y = \log_a x$ *имеет два промежутка знакопостоянства*: $(0; 1)$ *и* $(1; +\infty)$.

Если $a > 1$, *то* $y < 0$ *на* $(0; 1)$; $y > 0$ *на* $(1; +\infty)$;

если $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на* $(0; 1)$.

Если функция возрастающая (убывающая), то обратная к ней функция является также возрастающей (убывающей). Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$.

Поэтому *функция* $y = \log_a x$ *является возрастающей при* $a > 1$ *и убывающей при* $0 < a < 1$.

Область определения	$(0; +\infty)$
Область значений	$\mathbb{R}$
Нули функции	$x = 1$
Промежутки знакопостоянства	Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Возрастание / убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая

Пример 1. Сравните с единицей основание a логарифма, если известно, что $\log_a 5 < \log_a 4$.

Решение. Предположим, что $a > 1$, тогда функция $y = \log_a x$ является возрастающей. Поэтому $\log_a 5 > \log_a 4$. Но по условию это не так. Значит, $a < 1$. ◄

Пример 2. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Решение. 1) Поскольку область определения логарифмической функции – множество положительных чисел, то областью определения данной функции является множество решений неравенства $x^2 + 3x > 0$.

Имеем: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ или $x > 0$.

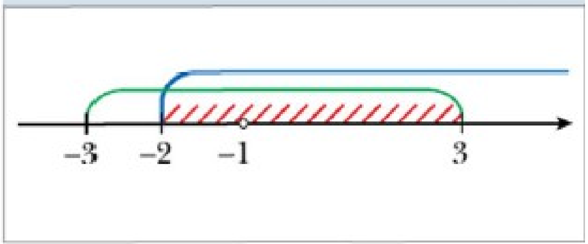
Следовательно, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Выражение $\lg(9 - x^2)$ имеет смысл при $9 - x^2 > 0$, выражение $\lg(x + 2)$ – при $x + 2 > 0$. Кроме того, знаменатель дроби не может быть равным нулю, поэтому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким образом, область определения $D(f)$ данной функции – это множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Рис. 5.2



Обратившись к рисунку 5.2, приходим к выводу, что последняя система равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

Следовательно, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область определения данной функции найдём, решив систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

Пример 3. Сравните: 1) $\log_2 6$ и $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ и $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_6 7$ и $\log_7 6$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ и 0; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ и -2.

Решение. 1) Поскольку логарифмическая функция $y = \log_2 x$ — возрастающая, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Поскольку логарифмическая функция $y = \log_{0,2} x$ — убывающая, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Имеем: $\log_6 7 > \log_6 6$, то есть $\log_6 7 > 1$. Вместе с тем $\log_7 7 > \log_7 6$, то есть $1 > \log_7 6$. Следовательно, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Учитывая, что $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, имеем: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$. Следовательно, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

5) Имеем: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$. Поскольку $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◀

Практическая часть занятия 2.

№1 Сравните:

1) $\log_{12}5\,u\,\log_{12}6$ 3) $\log_{\frac{1}{3}}2\,u\,\log_{\frac{1}{3}}4$

2) $\log_5\frac{1}{2}\,u\,\log_5\frac{1}{3}$ 4) $\log_{\frac{\pi}{2}}0,7\,u\,\log_{\frac{\pi}{2}}0,6$

№2 Сравните:

1) $\log_9 2$ и 3; 3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ и 6;

2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ и -2; 4) $\log_{16} 0,1$ и $-\frac{3}{4}$.

№3 Между какими двумя последовательнммми целыми числами находится число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$