

Срок сдачи 10.02.22г.

Анализ функций и построение их графиков.

Алгоритм исследования функции

- 1. Найти область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.**
- 2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.**
- 3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.**
- 4. Найти асимптоты графика функции.**
- 5. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы .**
- 6. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.**
- 7. Построить график функции по результатам исследования.**

Замечания:

1) *Пункты исследования можно опускать, если они дают банальную информацию, или переставлять, если обнаруживаются интересные особенности поведения графика.*

2) *Для уточнения графика можно найти некоторые дополнительные точки, но иногда удастся обойтись и без них.*

3) *Рекомендуется строить график одновременно с исследованием функции, нанося на координатную плоскость информацию по завершении каждого пункта исследования.*

Методические рекомендации по выполнению алгоритма исследования функции

- 1. Область определения функции $D(y)$ - это множество значений аргумента x , при которых функция имеет смысл.**

Область допустимых значений $E(y)$ функции – это множество значений переменной y .

- 2. Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная, график функции симметричен относительно оси OY .**

Если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

В противном случае функция является ни четной, ни нечетной.

3. Точки пересечения графика с осями координат:

Нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ох):

Для нахождения нулей функции решаем уравнение $f(x) = 0$.

Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (Оу). Для этого ищем значение функции при $x=0$.

Находим промежутки знакопостоянства функции, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

4. Асимптоты графика функции:

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = y_0$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно y_0 .

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$

Нахождение наклонной асимптоты

Теорема (об условиях существования наклонной асимптоты):

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \rightarrow \infty$.

5. Исследование функции на монотонность и экстремум:

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$ - это критические точки.

Критические точки разбивают область определения функции на промежутки монотонности.

в) Определяем знак производной на каждом промежутке.

Промежутки, на которых производная положительна, являются промежутками возрастания функции.

Промежутки, на которых производная отрицательна, являются промежутками убывания функции.

г) Исследуем критические точки: точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус, являются точками максимума.

Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс, являются точками минимума.

д) Находим значения функции в точках экстремума.

6. Промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Промежутки выпуклости графика функции определяются по знаку 2-й производной:

Если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция имеет вогнутость на этом интервале, если $f''(x) < 0$, то функция имеет выпуклость.

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M(x_1; f(x_1))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

Пример 1.

Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Решение.

1) $D(y) = \mathbb{R}$

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2} \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной, функция общего вида.

Функция неперiodическая.

3) Найдём точки пересечения графика функции с осями координат:

Нули функции.

С осью Oy:

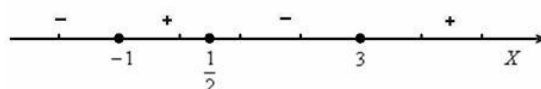
$$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Чтобы найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) требуется решить уравнение $f(x) = 0$ (пункт исследования можно опустить если решить не предоставляет возможности)

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$$

$$(x+1) \cdot \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x = -1, x = \frac{1}{2}, x = 3$$



Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1)$, $(\frac{1}{2}; 3)$ график расположен ниже оси абсцисс $f(x) < 0$, а на интервалах $(-1; \frac{1}{2})$, $(3; +\infty)$ – выше данной оси $f(x) > 0$.

4) Асимптот нет, т.к. функция непрерывна на всей своей области определения.

5) Возрастание, убывание.

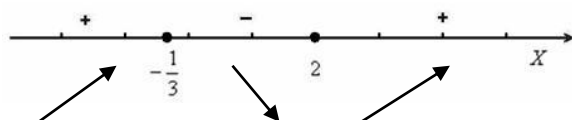
Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)' = 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

(решить с помощью дискриминанта)

$$x = -\frac{1}{3}, x = 2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



Следовательно, функция возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{3})$ и $(2; +\infty)$ и убывает на $(-\frac{1}{3}; 2)$.

Экстремумы функции

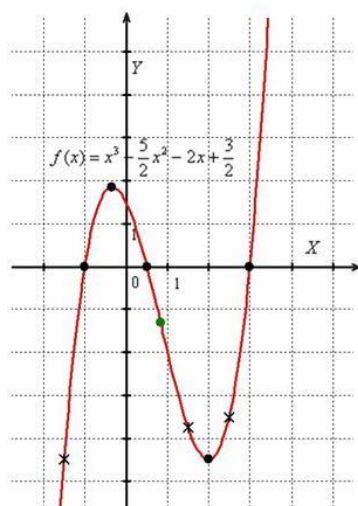
$x = -\frac{1}{3}$ точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-»

$x = 2$ точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

8). $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{50}{27} \approx 1,85$

$\therefore f(2) = 8 - 10 - 4 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$.

7) Строим график функции.



Пример 2:

Исследовать функцию $y(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции.

$$D(y) : x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

2) Четность, нечетность.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) - 1}{(-x)^2 - 2 \cdot (-x)} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x} \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}$$

Функция общего вида.

3) Точки пересечения с осями.

а) с осью $Ox : y = 0$:

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$A_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0 \right), A_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0 \right)$$

то есть точки

б) с осью $Oy : x = 0$: в данной точке функция неопределенна.

4) Асимптоты.

а) вертикальные: прямые, точки разрыва: $x^2 - 2x = 0$ следовательно $x(x - 2) = 0$

$x = 0$ и $x = 2$ - вертикальные асимптоты.

б) горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

то есть прямая $y = 1$ - горизонтальная асимптота.

в) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

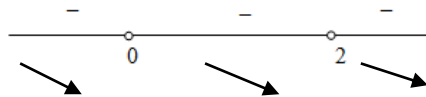
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x(x^2 - 2x)} = 0$$

Таким образом, наклонных асимптот нет.

5) Критические точки функции, интервалы возрастания, убывания.

$$y' = \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} \right)' = \frac{(2x - 1)(x^2 - 2x) - (x^2 - x - 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ = \frac{2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - (2x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ = \frac{2x^3 - 5x^2 + 2x - 2x^3 + 4x^2 - 2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или не существует: $y' \neq 0$ для любого x из области определения функции; y' не существует при $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.



Таким образом, функция убывает на всей области существования.

Точек экстремума нет.

6) Точки перегиба, интервалы выпуклости, вогнутости.

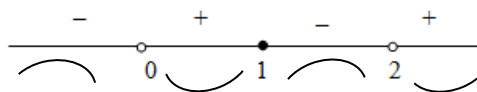
$$\begin{aligned}
 y'' = (y')' &= \left(\frac{-x^2 + 2x - 2}{(x^2 - 2x)^2} \right)' = \\
 &= \frac{(-2x + 2)(x^2 - 2x)^2 - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x^2 - 2x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4} = \\
 &= \frac{(-2x + 2)(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^3} = \\
 &= \frac{-2x^3 + 6x^2 - 4x + 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8}{(x^2 - 2x)^3} = \\
 &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x^2 - 2x)^3}
 \end{aligned}$$

Преобразуем числитель : $2x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 + (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^3 + (x-2)^3$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует: $x^3 + (x-2)^3 = 0$

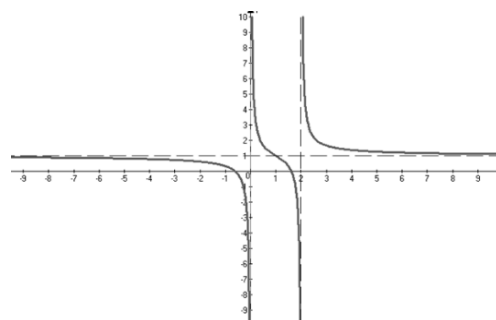
$$x^3 = -(x-2)^3$$

$y'' = 0 : x = 1$; при $x = 0$ и $x = 2$ вторая производная не существует.



Таким образом, на промежутках $(0; 1)$ и $(2; +\infty)$ функция вогнута, а на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(1; 2)$ - выпукла. Так как при переходе через точку $x = 1$ вторая производная поменяла знак, то эта точка является точкой перегиба.

7) Эскиз графика.



Задания для самостоятельного решения.

1. Напишите схему исследования функции, примеры приведенные для данной темы.

2. Исследуйте функцию и постройте график: $y=x^3+6x^2+9x+8$

3. Исследуйте функцию и постройте график: $y(x)=\frac{2}{x^2+2x}$