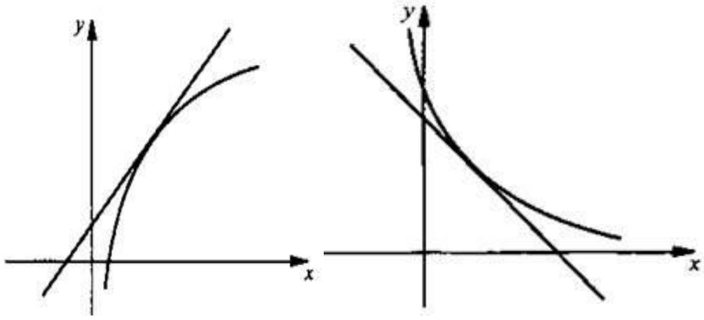
Срок сдачи 5.02.22г.

Исследование функций на монотонность и экстремумы

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.



Возрастающая функция, $f'(x) \geq 0$. Убывающая функция, $f'(x) \leq 0$

Пример

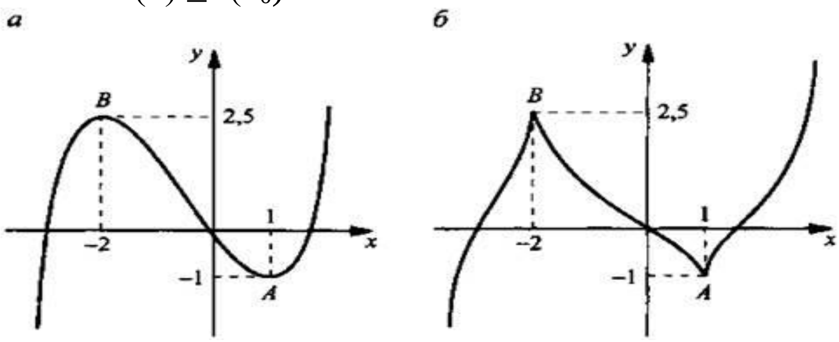
Исследуем на монотонность функцию $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 4x$.

Найдем производную функции: $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 + 4$. Видно, что при всех значениях x производная $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

2. Точки экстремума функции

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют *точкой минимума* функции $y= f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

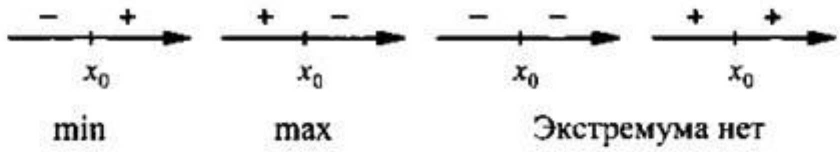


Точки максимума и минимума функции называют общим термином - *точки экстремума.*

На рисунках видно, что экстремум достигается в точке x_0, где производная $f'(x_0) = 0$ (рис. а), или производная не существует (рис. б). Это же подтверждает следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x= x_0$, то в этой точке производная функции или равна нулю, или не существует.

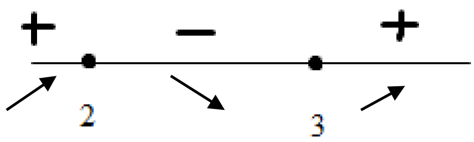
Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:
а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f(x) > 0$, то $x = x_0$ - точка минимума функции $y = f(x)$;
б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ - точка максимума функции $y = f(x)$;
в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки xo знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет (происходит изменение кривизны графика функции).



Для исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы приведем алгоритм.
1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. Сделать выводы о монотонности и точках экстремума функции.

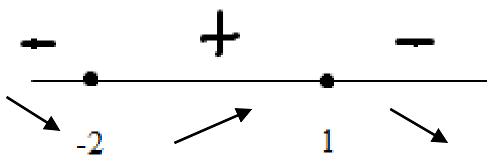
Решение задач

1. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 7$.
$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$
$6(x^2 - 5x + 6) = 0$
$x_1 = 2$ *и* $x_2 = 3$.
Отметим их на числовой прямой и определим знаки производной.



Видно, что на промежутках $(-\infty; 2]U[3; \infty)$ производная $f(x) \geq 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ *и* $[3; \infty)$.
На промежутке [2; 3] производная $f'(x) \leq 0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на промежутке *[2; 3]*.

2. Найти экстремумы функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4.$
$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2).$
$6(x^2 + x - 2) = 0,$
$x_1 = -2$ *и* $x_2 = 1$.
Отметим стационарные точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$.



Видно, что в точке *x = -2* знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому критическая точка *x = -2* - точка минимума. Найдем минимум функции: $f_{min} = f(-2) = -2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - 4 = -24.$ В точке *x = 1* знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка *x = 1* - точка максимума. Найдем максимум функции: $f_{max} = f(1) = -2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 12\cdot 1 - 4 = 3.$

Задания для самостоятельной работы

Найти экстремумы функции

1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 3$

2) $y = 2x - x^2$

3) $f(x) = \frac{x-3}{x}$

4) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$