Теорию переписываем сжато без доказательств. Примеры записываем и разбираем внимательно (подобные будут в экзамене)

Практическое задание делаем полностью и высылаем мне на электронную почту

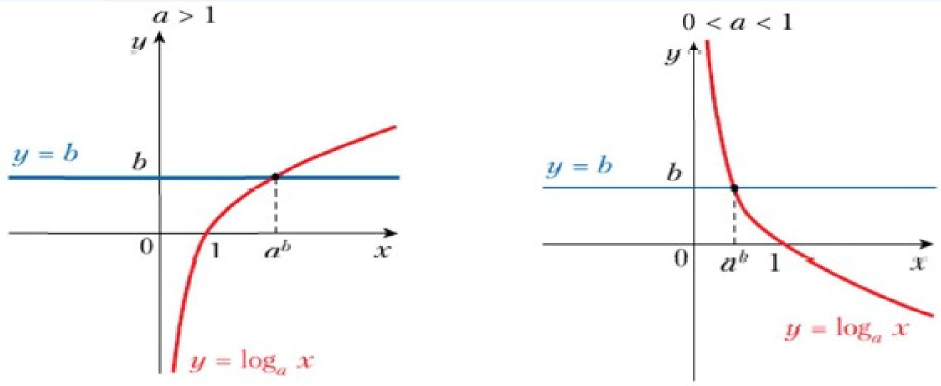
(Nkrotenko2018@list.ru *)*

Занятие 5 (08.02.22)

Логарифмические уравнения

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **простейшим логарифмическим уравнением.**

Поскольку графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$ пересекаются в одной точке рис. , то простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень при любом b. Этот корень можно найти, используя определение логарифма. Имеем: $x = a^b$.



Пример 1

Решите уравнение $\log_3 (3x - 1) = 2$.

Решение. По определению логарифма можно записать $3x - 1 = 3^2$. Отсюда $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Решенное уравнение — частный случай уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Рассуждая, как в примере 1, можно показать, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

При решении многих логарифмических уравнений применяют следующую теорему.

Теорема 1

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. ***Если*** $\log_a x_1 = \log_a x_2$, ***то*** $x_1 = x_2$, ***и наоборот, если*** $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ ***и*** $x_1 = x_2$, ***то*** $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Следствие. ***Пусть*** $a > 0$, $a \neq 1$. ***Уравнение вида*** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ***равносильно любой из систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, решить легче.

Теперь решение уравнения примера 1 можно оформить и так:

$$\log_3 (3x - 1) = 2 \log_3 3;$$
$$\log_3 (3x - 1) = \log_3 3^2;$$
$$3x - 1 = 3^2; \ x = \frac{10}{3}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\lg (x^2 - 4x + 2) = \lg (2x - 3)$.
Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Отсюда $x = 5$.

Ответ: 5. ◄

Пример 3

Решите уравнение

$$\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 2) = 3.$$

Решение. Естественно преобразовать это уравнение так:

$$\log_3 ((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Отсюда $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$;

$$x = 5 \text{ или } x = -\frac{5}{2}.$$

Легко убедиться, что число $-\frac{5}{2}$ не является корнем данного уравнения (не входит в его область определения), а число 5 является корнем данного уравнения. Таким образом, данное уравнение решено методом следствий.

Ответ: 5.

Обратим внимание, что сделанный во время решения примера 3 переход от уравнения $\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 2) = 3$ к уравнению $\log_3 ((2x - 1)(x - 2)) = 3$ не был равносильным и привел к появлению постороннего корня.

Область определения исходного уравнения задаётся системой неравенств $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множеством решений которой является промежуток $(2; +\infty)$. Заменив выражение $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2)$ на выражение $\log_3((2x - 1)(x - 2))$, мы расширили область определения исходного уравнения. Действительно, область определения уравнения $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ задаётся неравенством $(2x - 1)(x - 2) > 0$, множеством решений которого является объединение промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Следовательно, расширение области определения уравнения от множества $(2; +\infty)$ до множества $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ и стало причиной появления постороннего корня $-\frac{5}{2}$.

Решение уравнения из примера 3 можно оформить следующим образом. Уравнение $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ равносильно системе

$$\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$

Получаем $x = 5$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Решение. Поскольку $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда получаем: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$. Это уравнение равносильно системе

$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тогда исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{2}$; 4. ◄

Пример 5. Решите уравнение $x^{\frac{\lg x+2}{3}} = 10^{2+\lg x}$.

Решение. Поскольку на области определения уравнения, то есть на множестве $(0; +\infty)$, обе его части принимают положительные значения, то можем записать уравнение, равносильное данному:

$$\lg x^{\frac{\lg x+2}{3}} = \lg 10^{2+\lg x}. \text{ Отсюда } \frac{\lg x+2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x.$$

Пусть $\lg x = t$. Тогда $\frac{(t+2)t}{3} = 2 + t$. Получаем $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 3. \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 10^{-2}, \\ x = 10^3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0{,}01, \\ x = 1000. \end{array}\right.$

Ответ: 0,01; 1000. ◄

Практическая часть занятия 5.

№1 Решите уравнения:

1) $\log_2(x-1)=1$ 2) $\log_7(x^2-2x-8)=1$

№2 Решите уравнения:

1) $\log_\pi(x+1)=\log_\pi(4x-5)$ 2) $lg(x^2+2)=lg(3x+6)$

№3 Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}\log_6(5x+1)=\log_6(x-1)$ 2) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$