На неделе дистанционного обучения у вас должно быть 2 занятия (если не изменят расписание)
Во вложении оба занятия. Теорию переписываем сжато без доказательств. Примеры записываем (можно не все) и разбираем внимательно (подобные будут в ***экзамене***)
Практическое задание делаем *полностью* и *высылаем* мне на электронную почту
(Nkrotenko2018@list.ru *)*

Занятие1

Простейшие показательные уравнения и сводящиеся к ним.

Рассмотрим уравнения $2^x = 8$,
$3^x \cdot 3^{x-1} = 4$,
$0,3^{x-4} = 0,3^{x^2}$.

Во всех этих уравнениях переменная содержится только в показателе степени. Данные уравнения – примеры **показательных уравнений**.

При решении многих показательных уравнений используют следующую теорему.

Теорема 2.1

При $a > 0$ и $a \neq 1$ равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Следствие

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доказательство

Пусть x_1 – корень уравнения (1), то есть $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тогда по теореме 2.1 получаем, что $f(x_1) = g(x_1)$. Следовательно, x_1 – корень уравнения (2).

Пусть x_2 – корень уравнения (2), то есть $f(x_2) = g(x_2)$. Отсюда $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны. ◄

Пример 1. Решите уравнение $(0,125)^x = 128$.

Решение. Представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 2. Имеем: $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ и $128 = 2^7$. Запишем:

$$(2^{-3})^x = 2^7; \qquad 2^{-3x} = 2^7.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$-3x = 7.$$

Отсюда $x = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{3}$. ◄

Пример 2. Решите уравнение $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Решение. Воспользовавшись свойствами степени, представим левую и правую части уравнения в виде степени с основанием 10. Имеем:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3}; \qquad 10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходим к равносильному уравнению:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Отсюда $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: 1; 2. ◄

Пример 3. Решите уравнение $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$.

Решение. Имеем: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280$.

В левой части полученного уравнения вынесем за скобки степень с наименьшим показателем. Получаем:

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280; \qquad 2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$

$$2^{12x-4} = 256; \qquad 2^{12x-4} = 2^8; \qquad 12x - 4 = 8; \qquad x = 1.$$

Ответ: 1. ◄

Пример 4. Решите уравнение $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Решение. Имеем: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4)$; $\qquad 3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{9}{15}; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5}; \qquad x = 1.$$

Ответ: 1. ◄

Пример 5. Решите уравнение $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Решение. Поскольку $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то данное уравнение удобно решать методом замены переменной.

Пусть $5^x = t$. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Отсюда $t = 1$ или $t = -5$.

Если $t = 1$, то $5^x = 1$. Отсюда $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Если $t = -5$, то $5^x = -5$. Поскольку $5^x > 0$ при любом x, то уравнение $5^x = -5$ не имеет корней.

Ответ: 0. ◄

Пример 6. Решите уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Решение. Имеем: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Поскольку $3^{2x} \neq 0$ при любом x, то, разделив обе части уравнения на 3^{2x}, получим уравнение, равносильное данному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0. \text{ Отсюда } 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тогда можно записать:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Имеем: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при любом x, то первое уравнение совокупности решений не имеет. Второе уравнение совокупности перепишем так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Отсюда $x = -2$.

Ответ: -2. ◄

Практическая часть занятия 1

№1 Решить уравнение

1) $4^x = 64$ ***; 2)*** $3^x = \frac{1}{81}$ ***; 3)*** $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$

№2 Решить уравнение

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$ ***; 2)*** $6^{x+1} - 4 * 6^{x-1} = 192$ ***; 3)*** $2^{2x} - 6 * 2^x + 8 = 0$

Занятие2

Показательные неравенства.

Неравенства $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$, содержащие переменную только в показателе степени, являются примерами **показательных неравенств.**

При решении многих показательных неравенств используют следующую теорему.

Теорема 3.1

При $a > 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей.

Следствие

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите это следствие самостоятельно.

Рассмотрим примеры решения показательных неравенств.

Пример 1. Решите неравенство $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Решение. Имеем: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Поскольку основание степеней 2^{3x+2} и 2^1 больше единицы, то последнее неравенство равносильно такому:

$$3x + 2 < 1.$$

Отсюда $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

__Пример 1.__ Решите неравенство $8\cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$

Решение. Имеем: $2^3\cdot 2^{3x-1} < ((2)^{-1})^{-1}$;

$2^{3x+2} < 2^1$

Поскольку основание степеней **__2 > 1__**, то последнее неравенство равносильно такому:

$$3x+2<1 \quad .$$

Отсюда $3x<-1;\, x<-\frac{1}{3}$

Пример 3. Решите неравенство $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52.$

Решение. Перепишем данное неравенство так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Отсюда $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52;$ $2^{2x-4} \cdot 13 > 52;$ $2^{2x-4} > 4;$ $2^{2x-4} > 2^2;$ $2x - 4 > 2;$ $x > 3.$

Ответ: $(3; +\infty)$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$

Решение. Имеем: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$ $2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$ $2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$

Пусть $2^{-x} = t$. Тогда последнее неравенство приобретает вид

$$2t^2 - 7t - 4 < 0.$$

Решив это неравенство, получим $-\frac{1}{2} < t < 4$. Отсюда $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4.$

Поскольку $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всех x. Поэтому достаточно решить неравенство $2^{-x} < 4$.

Имеем: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$. ◄

Пример 5. Решите неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0.$

Решение. Перепишем данное неравенство так: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0.$ Поскольку $5^{2x} > 0$ при любом x, то, разделив обе части последнего неравенства на 5^{2x}, получаем неравенство, равносильное данному:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тогда последнее неравенство приобретает вид $t^2 + t - 2 > 0$. Решив это неравенство, получаем $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

Из неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ находим, что $x < 0$. Неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не имеет решений.

Ответ: $(-\infty; 0)$. ◄

Практическая часть занятия 2

№1 Решите неравенство:

1)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$ **;** **2)** $11^{x-5} < 11^{3x+1}$ **;** **3)** $0{,}4^{6x+1} \leqslant 0{,}4^{2x+5}$ **.

№2 Решите неравенство:

1)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$ **;** **2)** $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$ **.